Subanalytic幾何とPL位相(実特異点の研究)

塩田, 昌弘

数理解析研究所講究録
764巻 1991年 17-22

Subanalytic 幾何とPL位相

名大養　塩田昌弘 (Masahiro Shiota)

<u>問題</u>　Subanalytic 集合の色々な位相的性質は，"subanalytic"のどの性質から生まれてくるか．

<u>解</u>　次に示すように，"analytic"によるのではなく，すべてのsubanalytic集合の族が，余り大き過ぎも，小さ過ぎもせず，ある演算で閉じているから．

<u>定義</u>　$\mathcal{X}$を次の条件をみたす，$\mathbb{R}^n$，$n=0,1,\dots$，の部分集合の族とする．

(i) どんな$\mathbb{R}^n$の代数的集合も$\mathcal{X}$の元．

(ii) もし$X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$が$\mathcal{X}$の元なら，$X_1 \cap X_2$，$X_1 - X_2 \subset \mathbb{R}^n$も$X_1 \times X_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$も$\mathcal{X}$の元．

(iii) $X \subset \mathbb{R}^n$を$\mathcal{X}$の元とする．$p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$を，$p|_{\overline{X}}$がproperな射影とする．すると$p(X)$は$\mathcal{X}$の元．

(iv) $X \subset \mathbb{R}$が$\mathcal{X}$の元なら，任意の点$a \in X$に対してaの$\mathbb{R}$での近傍Uと$b, c \in \mathbb{R}$が存在して，$X \cap U = a$，$[a, b]$，$[b, a]$又は$[b, c]$となる．

$\mathcal{X}$の例の一番目は，すべての半代数的集合で，二番目は，すべてのsubanalytic 集合である．$\mathbb{R}^n$の部分集合で，有限個のPfaffian多様体に分割できるもの全体は，$\mathcal{X}$の例になると思われるが，証明はできていない（Van den Dries[2]を参照）．$y=\exp$（xの有理関数）のグラフをすべて含む$\mathcal{X}$は存在するか，どうか分からない[2]．もし，そんな$\mathcal{X}$が存在すれば，$y=\exp(-1/x^2)$のグラフとx軸の和集合を考えれば，Łojasiewiczの不等式は$\mathcal{X}$で必ずしも，成り立たないことが分かる．

以下$\mathcal{X}$を一つ仮定して，$\mathcal{X}$の元はsubanalytic集合の位相的性質を，ほぼ，すべて持っていることを示したい．rを正なる自然数とする．$\mathcal{X}$の元を$\mathcal{X}$-集合と呼ぶ．$\mathcal{X}$-集合間の連続写像を，もしそのグラフが$\mathcal{X}$-集合のとき，$\mathcal{X}$-写像と呼ぶ．$\mathcal{X}$-関数，$\mathcal{X}$-ベクトルバンドル等も自然に定義する．

<u>(1)</u> $X\subset\mathbb{R}^l$と$Y\subset\mathbb{R}^m$と$Z\subset\mathbb{R}^n$を$\mathcal{X}$-集合とし，f_1とf_2をX上の$\mathcal{X}$-関数，$f:X\to Y$と$g:Y\to Z$を$\mathcal{X}$-写像とする．任意の有界集合$B\subset\mathbb{R}^l$に対して，$f_1(X\cap B)$と$f_2(X\cap B)$と$f(X\cap B)$は有界だとする．そのとき，f_1f_2とf_1+f_2は$\mathcal{X}$-関数で，$g\circ f$は$\mathcal{X}$-写像である．

$h=(h_1,\dots,h_m):X\to\mathbb{R}^m$を写像とし，任意の有界集合$B\subset\mathbb{R}^l$に対して，$h(X\cap B)$が有界だと仮定する．すると，$h$が$\mathcal{X}$-

写像である為の必要十分条件は，すべてのh_iが$\mathfrak{X}$-関数であること．

<u>(2)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$を空でない$\mathfrak{X}$-集合とする．するとXの閉包$\overline{X}$は$\mathfrak{X}$-集合で，Xからの距離関数は$\mathfrak{X}$-関数である．

<u>(3)</u> fを$\mathfrak{X}$-開集合$U \subset \mathbb{R}^n$上のC^1 $\mathfrak{X}$-関数とする．すると$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$は$U$上の$\mathfrak{X}$-関数である．

<u>(4)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$をC^1 $\mathfrak{X}$-部分多様体とすると，接バンドル$TX \to X$は$\mathfrak{X}$-ベクトルバンドルである．

<u>(5)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$をm次元C^1 $\mathfrak{X}$-部分多様体とする．$G_{n,m}$を$\mathbb{R}^n$の中のm次元部分空間全体のグラスマン多様体とする．自然に，$G_{n,m}$は$\mathbb{R}^{n^2}$の中の代数的部分多様体とできる．そのとき，集合$\{(x, T_xX) \in X \times G_{n,m}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$は$\mathfrak{X}$-集合になる．

<u>(6)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$と$Y \subset \mathbb{R}^n$を$\mathfrak{X}$-集合とし，$f: X \to \mathbb{R}^n$を$\mathfrak{X}$-写像とする．もし，任意の有界集合$B \subset \mathbb{R}^n$に対して，$f^{-1}(B)$が有界なら，$f(X)$は$\mathfrak{X}$-集合である．もし，同じBに対して，$f(X \cap B)$が有界なら，$f^{-1}(Y)$は$\mathfrak{X}$-集合である．

<u>(7)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$と$Y \subset \mathbb{R}^n$をC^1 $\mathfrak{X}$-部分多様体とし，$f: X \to Y$をC^1 $\mathfrak{X}$-写像とする．任意の有界集合$B \subset \mathbb{R}^n$に対して，$f(X \cap B)$は有界だと仮定する．すると，fの特異点集合は$\mathfrak{X}$-集である．

<u>(8)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$を有界な$\mathfrak{X}$-集合とする．すると，Xの連結成分

は有限個で，各成分は $\mathcal{X}$-集合である．

(9) $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でない $\mathcal{X}$-集合とする．すると，$\overline{X}-X$ の次元は X の次元より小．（$\dim \phi = -1$ と見なす．）

(10) $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でない $\mathcal{X}$-集合とする．すると，X の C^r 特異点集合は $\mathcal{X}$-集合で，その次元は X の次元より小さい．よって X は C^r $\mathcal{X}$-分割をもつ．

(11) $X \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathcal{X}$-集合とし，$\overline{X}-X$ は 0 を含むとする．すると，$\mathcal{X}$-曲線 $\varphi : [0,1] \to \overline{X}$ が存在して，$\varphi(0)=0$ かつ $\varphi((0,1]) \subset X$，とできる．

(12) $X \subset \mathbb{R}^n$ と $Y \subset \mathbb{R}^n$ を空でない C^r $\mathcal{X}$-部分多様体とし，$Y \subset \overline{X}-X$ と仮定する．X と Y が，そこで Whitney 条件を満たさない Y の点全体を Y' とする．すると Y' は $\mathcal{X}$-集合で，次元は Y の次元より小．

(13) $X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトな $\mathcal{X}$-集合とする．すると，多面体 $Y \subset \mathbb{R}^{n'}$ と，$\mathcal{X}$-同相写像 $\varphi : Y \to X$ が存在する．

f を X 上の $\mathcal{X}$-関数とする．すると，上の Y と φ を，$f \circ \varphi$ が区分的に線型になるようにとれる．

さらに，Y と φ は，次の意味で，一意的である．もし別の Y_1 と φ_1 が存在すれば，Y から Y_1 への区分的に線型な同相写像 π が存在して，$f \circ \varphi_1 \circ \pi = f \circ \varphi$ となる様にできる．

(14) r' を，r より小さい，負でない整数とする．$X \subset \mathbb{R}^n$ と

$Y \subset \mathbb{R}^n$をC^r $\mathcal{X}$-部分多様体とし，$f: X \to Y$を$C^{r'}$ $\mathcal{X}$-写像とする．すると，fはC^r $\mathcal{X}$-写像gで近似できる．位相は，r'階までの$f-g$の導関数が任意の正の$\mathcal{X}$-関数より小さく取れる，そんな位相である．

<u>(15)</u> Thomの横断性定理の$\mathcal{X}$の場合は成り立つ．位相は上の位相である．

<u>(16)</u> r'をrより小さい，正の自然数とする．C^r $\mathcal{X}$-部分多様体$X \subset \mathbb{R}^n$に対して，恒等写像に任意に近い，$C^{r'}$ $\mathcal{X}$-同相写像πが存在して，$\pi(X)$はC^r $\mathcal{X}$-部分多様体になる．

<u>(17)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$を，コンパクトでない，有界な，C^r $\mathcal{X}$-部分多様体とする．するとコンパクトな，境界付C^r $\mathcal{X}$-部分多様体$Y \subset \mathbb{R}^n$が一意的に存在して，XはYの内部とC^r $\mathcal{X}$-同相になる．

<u>(18)</u> $\mathbb{R}^n$の有界なC^r $\mathcal{X}$-部分多様体は，アファインな非特異な実代数的集合とC^r $\mathcal{X}$-同相である．

<u>(19)</u> f_1とf_2を$\mathcal{X}$-集合$X \subset \mathbb{R}^n$上の$\mathcal{X}$-関数とする．f_1とf_2の零点集合は同一，又f_1が正になるXの点の集合は，f_2のそれと同一と仮定する．すると，Xの$\mathcal{X}$-同相写像πが存在して，$f_1 \circ \pi$はf_2と$f_2^{-1}(0)$の近くで，等しくなる．

<u>(20)</u>. $\mathbb{R}^n$の中のC^1 Whitney $\mathcal{X}$-分割は，局所的に，$\mathcal{X}$-自明である．

<u>(21)</u> $M \subset \mathbb{R}^n$を$\mathcal{X}$-部分多様体，XとYをMの$\mathcal{X}$-部分集合とする．あるMのC^1同相写像がXをYに移すと，仮定する．す

ると，Mの$\mathcal{C}^0$同相写像が存在して，それはXをYに移す．（C^1級の$\mathcal{C}^0$同相写像が取れると，思うが，証明はできていない．）

(22) $X\subset\mathbb{R}^n$をコンパクトな非特異代数的集合，f_1とf_2をX上の多項式関数とする．XのC^1同相写像πが存在して，$f_1\circ\pi=f_2$となると，仮定する．するとXの$\mathcal{C}^0$同相写像π'が存在して，$f_1\circ\pi'=f_2$とできる．

(19)～(22)は(13)の応用である．すべての結果の証明は[1]で書かれる．

参考文献

[1]. M. Shiota, Subanalytic geometry and PL topology.

[2]. L. Van Den Dries, Remarks on Tarski's problem concerning ($\mathbb{R}$, +, ·, exp.), Logic Colloquium 1982, 97-121, Ed. by G. Lolli, G. Longo, A. Marja, North Holland, 1984.